

**Άσκηση 1** (Παραγοντική ολοκλήρωση- Μορφή 1)

Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\text{i) } \int_0^1 (2x + 1)e^x dx \quad \text{ii) } \int_0^1 x^2 e^x dx \quad \text{iii) } \int_0^1 3x e^x dx$$

Άσκηση 2 (Παραγοντική ολοκλήρωση - Μορφή 2)

Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\text{i) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \eta\mu x dx \quad \text{ii) } \int_0^{\pi} x^2 \sigma\nu\nu x dx \quad \text{iii) } \int_{\pi}^{2\pi} (x^2 + 2x) \sigma\nu\nu \frac{x}{2} dx$$

Άσκηση 3 (Παραγοντική ολοκλήρωση - Μορφή 3)

Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\text{i) } \int_1^2 \ln x dx \quad \text{ii) } \int_1^2 2x^2 \ln 2x dx \quad \text{iii) } \int_2^4 x \ln^2 x dx$$

Άσκηση 4 (Παραγοντική ολοκλήρωση - Μορφή 4)

Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\text{i) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sigma\nu\nu x dx \quad \text{ii) } \int_0^{\pi} e^{2x} \sigma\nu\nu x dx \quad \text{iii) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \eta\mu 2x dx$$

**Άσκηση 5** (Ολοκλήρωση με αντικατάσταση - Μορφή 1)

Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\text{i) } \int_{-2}^{-1} (x-1)(x+2)^4 dx \qquad \text{ii) } \int_0^1 (x+2)(x-1)^5 dx$$

Άσκηση 6 (Ολοκλήρωση με αντικατάσταση - Μορφή 2)

Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\text{i) } \int_1^6 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx \qquad \text{ii) } \int_3^{10} x \cdot \sqrt[3]{x-2} dx \qquad \text{iii) } \int_1^e \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx$$

Άσκηση 7 (Ολοκλήρωση με αντικατάσταση - Μορφή 3)

Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\text{i) } \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx \qquad \text{ii) } \int_0^1 e^{2x} \sigma \nu \nu e^x dx \qquad \text{iii) } \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{e^x + 2} dx$$

Άσκηση 8 (Συνδυασμός αντικατάστασης με κατα παράγοντες ολοκλήρωση)

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_0^1 x \ln(9+x^2) dx$.



Άσκηση 9 (ανισοτικές σχέσεις και ολοκληρώματα)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x + \frac{1}{x} - 2$. Να

αποδείξετε ότι:

- i. $f(x) \geq 0$ για κάθε $x > 0$. Πότε ισχύει η ισότητα;
- ii. $\int_1^3 \left(x + \frac{1}{x}\right) dx > 3$

Άσκηση 10 (ανισοτικές σχέσεις και ολοκληρώματα)

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 2 - e^{-x^2}$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

ii. Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^1 (2 - e^{-x^2}) dx \geq 2$

Άσκηση 11 (ανισοτικές σχέσεις και ολοκληρώματα - 23219)

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, η οποία είναι κυρτή και ισχύει $f(1) = f'(1) = 2$.

α) Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(1, f(1))$ και κατόπιν να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

γ) Να αποδείξετε ότι: i. $\int_0^1 f(x) dx > 1$ ii. $\int_0^1 xf'(x) dx < 1$



Άσκηση 12 (ανισοτικές σχέσεις και ολοκληρώματα - 36816)

Θεωρούμε συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, συνεχή στο $x_0 = 0$,

για την οποία ισχύει $xf(x) = \eta\mu x$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

α) Να βρείτε το $f(0)$.

β) Να βρείτε τον τύπο της f .

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

δ) Να αποδείξετε ότι:
$$\frac{\sqrt{2}}{6} \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx \leq \frac{1}{4}$$

Άσκηση 13 (ανισοτικές σχέσεις και ολοκληρώματα - 33578)

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in [0, \pi]$ ισχύει $e^x + \eta\mu x \geq 1$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $H(x) = x - \ln(e^x + \eta\mu x)$, $x \in [0, \pi]$, είναι μια αρχική (παράγουσα) της συνάρτησης $f(x) = \frac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{e^x + \eta\mu x}$, $x \in [0, \pi]$.

γ) Να αποδείξετε ότι
$$\int_0^{\pi} xf'(x)dx = \frac{\pi}{e^{\pi}}.$$

δ) Να αποδείξετε ότι
$$\int_1^e \frac{1}{(e^x + \eta\mu x) \cdot x} dx < 1.$$



Άσκηση 14 (ανισοτική σχέση και υπολογιστικό ολοκλήρωμα - 24770)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1) + x - 1$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής της παράστασης στο $x_0 = \ln 2$.

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $\ln(e^x - 1) \leq 2x - \ln 4$.

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{2 - e^{-x}}{e^{-x} - 1} dx$.

Άσκηση 15 (Εμβαδόν χωριού που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$, $x = a$ και $x = \beta$)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 e^x$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωριού που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 3$.

Άσκηση 16 (Εμβαδόν χωριού που περικλείεται από την C_f και τον άξονα $x'x$)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωριού που περικλείεται από τη C_f και τον άξονα $x'x$.

Άσκηση 17 (Εμβαδόν χωριού που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$, $x = a$ και $x = \beta$)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x + 1}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωριού που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 2$ και $x = 5$.



Άσκηση 18 (Εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$, $x = \alpha$ και $x = \beta$)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και

τις ευθείες $x = 1$ και $x = 4$.

Άσκηση 19 (Εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$, $x = \alpha$ και $x = \beta$)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 \ln x$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μόνο ένα σημείο της C_f , στο οποίο η εφαπτόμενη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και

την ευθεία $x = x_0$ όπου x_0 είναι θέση τοπικού ακροτάτου της f .

Άσκηση 20 (Εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από τις C_f , C_g)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = e^x$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f , C_g καθώς και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$.

ΚΑΛΟ ΔΙΑΒΑΣΜΑ !!!