



**Άσκηση 1** (εύρεση αρχικής βασικών συναρτήσεων)

Να βρείτε τις αρχικές (παράγουσες) των παρακάτω συναρτήσεων:

i.  $f(x) = \eta\mu x - \frac{1}{x^2} + e^{-x}, x > 0$

ii.  $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{\sigma\upsilon\nu^2 x} + \frac{3}{\sqrt{x}}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

iii.  $f(x) = 2^x - \frac{1}{\eta\mu^2 x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

iv.  $f(x) = \sqrt[3]{x}$

v.  $f(x) = \frac{\eta\mu^3 x + \sigma\upsilon\nu^2 x - 2}{\eta\mu^2 x}, x \in (0, \pi)$

vi.  $f(x) = \frac{3x^3 + 2x - 1}{x^2}, x > 0$

**Άσκηση 2** (εύρεση αρχικής συναρτήσεων με τον κανόνα γινομένου και πηλίκου)

Να βρείτε τις αρχικές (παράγουσες) των παρακάτω συναρτήσεων:

i)  $f(x) = \sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x$

ii)  $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{e^x}$

iii)  $f(x) = e^x \left( \ln x + \frac{1}{x} \right)$

iv)  $f(x) = \frac{2x - x^2}{e^z}$



### **Άσκηση 3** (εύρεση αρχικής σύνθετων συναρτήσεων)

Να βρείτε τις αρχικές (παράγουσες) των παρακάτω συναρτήσεων:

$$i) f(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^3}$$

$$ii) f(x) = x\sqrt{x^2 + 1}$$

$$iii) f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1 + e^x}}$$

$$iv) f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$v) f(x) = \frac{1}{x-1}, \quad x > 1$$

$$vi) f(x) = \sigma \nu \nu x \cdot e^{\eta \mu x}$$

### **Άσκηση 4** (εύρεση συνάρτησης με την βοήθεια της αρχικής)

Δίνεται η συνάρτηση  $f : R \rightarrow R$  με  $F(0) = 0$  όπου  $F$  μια αρχική της  $f$ , για την οποία ισχύει:

$$2xF(x) + x^2f(x) = 4x^3 - f(x) \text{ για κάθε } x \in R.$$

i) Να βρείτε τον τύπο της  $f$

ii) Να βρείτε την ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$ .

### **Άσκηση 5** (Ολοκληρώματα βασικών συναρτήσεων)

Να βρείτε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$i) \int_1^2 x^4 dx \quad ii) \int_1^2 \frac{2}{x^3} dx \quad iii) \int_0^2 3\sqrt{x} dx \quad iv) \int_1^8 \frac{2}{\sqrt[3]{x}} dx \quad v) \int_0^1 \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} dx$$

$$vi) \int_0^\pi (2e^x + \eta \mu x) dx \quad vii) \int_1^e (2x \ln x + x) dx \quad viii) \int_0^1 (x - e^x) dx$$



### **Άσκηση 6** (Ολοκληρώματα βασικών συναρτήσεων)

Να βρείτε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\text{i) } \int_1^2 \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2} dx \quad \text{ii) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x + 2\eta\mu x) dx \quad \text{iii) } \int_0^1 (2xe^x + x^2e^x) dx$$

$$\text{iv) } \int_0^{\pi} (2x\sigma\nu\nu x - x^2\eta\mu x) dx \quad \text{v) } \int_0^2 (xe^x + e^x) dx \quad \text{vi) } \int_1^4 \left(2x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}}\right) dx$$

### **Άσκηση 7** (Ολοκληρώματα συναρτήσεων πολλαπλού τύπου)

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \eta\mu x, & x > 0 \end{cases}$ . Να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής και στη

συνέχεια να υπολογίσετε το  $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$ .

### **Άσκηση 8** (Ολοκληρώματα μέσα σε ολοκλήρωμα)

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left( \int_1^2 f(t)\sigma\nu\nu x dt \right) dx = 2. \text{ Να βρείτε το ολοκλήρωμα } \int_1^2 f(t) dt.$$

**Υπόδειξη:** ισχύει  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left( \int_1^2 f(t)\sigma\nu\nu x dt \right) dx = 2 \Leftrightarrow \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sigma\nu\nu x \left( \int_1^2 f(t) dt \right) dx = 2.$

Θέστε  $\int_1^2 f(t) dt = \lambda$  στην παραπάνω σχέση και λύστε ως προς  $\lambda$ .

**Άσκηση 9** (Ολοκληρώματα σύνθετων συναρτήσεων)

Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\text{i)} \int_0^1 3x^2 e^{x^3+5} dx \quad \text{ii)} \int_0^1 3 \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+1}} dx \quad \text{iii)} \int_0^1 \frac{2x+5}{x^2+5x+1} dx$$

$$\text{iv)} \int_1^2 \frac{2x+2}{(x^2+2x)^2} dx \quad \text{v)} \int_0^2 \frac{2x}{x^2+1} dx \quad \text{vi)} \int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

**Άσκηση 10** (Ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης)

Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\text{i)} \int_1^2 \frac{3x^2+2}{x^3+2x+1} dx \quad \text{ii)} \int_1^2 \frac{x+1}{x^2+2x+3} dx \quad \text{iii)} \int_1^2 \frac{4}{5x+1} dx$$

$$\text{iv)} \int_4^5 \frac{2}{x^2-1} dx \quad \text{v)} \int_1^2 \frac{x^3-2x}{x^3+3x+2} dx \quad \text{vi)} \int_4^5 \frac{x^2-3x+7}{x^2-5x+6} dx$$



**Άσκηση 11** (Παραγοντική ολοκλήρωση- Μορφή 1)

Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\text{i) } \int_0^1 2xe^x dx \quad \text{ii) } \int_0^2 (1 - 3x)e^x dx \quad \text{iii) } \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$$

**Άσκηση 12** (Παραγοντική ολοκλήρωση - Μορφή 2)

Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\text{i) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sigma \nu x dx \quad \text{ii) } \int_0^{\pi} x \eta \mu 2x dx \quad \text{iii) } \int_0^{\pi} 2x^2 \eta \mu 2x dx$$

**Άσκηση 13** (Παραγοντική ολοκλήρωση - Μορφή 3)

Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\text{i) } \int_1^2 x \ln x dx \quad \text{ii) } \int_1^2 x \ln 2x dx \quad \text{iii) } \int_1^2 (3x^2 - 4x) \ln x dx$$

**Άσκηση 14** (Παραγοντική ολοκλήρωση - Μορφή 4)

Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\text{i) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sigma \nu x dx \quad \text{ii) } \int_0^{\pi} e^{2x} \sigma \nu x dx \quad \text{iii) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sigma \nu 2x dx$$



**Άσκηση 15** (Παραγοντική ολοκλήρωση)

Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με συνεχή πρώτη παράγωγο για την οποία ισχύει ότι  $f(1) = 5$  και  $\int_0^1 f(x)dx = 2$ . Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $I = \int_0^1 xf'(x)dx$ .

**Άσκηση 16** (Συνδυαστική - 26184 Τ.Θ)

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, x > 0$ .

α) Να βρείτε, την κατακόρυφη ασύμπτωτη και την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$ .

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  έχει ολικό μέγιστο για  $x = e^2$ .

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $I = \int_1^{e^2} f(x)dx$ .

**Άσκηση 17** (Συνδυαστική -24770 Τ.Θ )

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln(e^x - 1) + x - 1, x > 0$ .

α) Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη.

β) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής της παράστασης στο  $x_0 = \ln 2$ .

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x > 0$  ισχύει:  $\ln(e^x - 1) \leq 2x - \ln 4$ .

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{2 - e^{-x}}{e^{-x} - 1} dx$ .