

**Άσκηση 1** (κατακόρυφες ασύμπτωτες)

Να βρείτε αν υπάρχουν τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \frac{x}{x-1}$

β) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

Άσκηση 2 (πλάγιες - οριζόντιες ασύμπτωτες)

Να βρείτε αν υπάρχουν οι πλάγιες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 4}$

β) $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$

γ) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

Άσκηση 3 (μονοτονία - κυρτότητα και ασύμπτωτες)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της f .

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.



Άσκηση 4 (μονοτονία και ασύμπτωτες)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$ με $x \neq 1$.

- α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε): $y = x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .
- β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε'): $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .
- γ) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.

Άσκηση 5 (ασύμπτωτες)

Δίνεται η συνάρτηση $f : R \rightarrow R$ με $f(x) = x - \frac{x - 1}{x^2 + 1}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε: $y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.
- β) Να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία της ε: $y = x$ με την γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
- γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι "1-1".

Άσκηση 6 (Ασύμπτωτες)

Αν η ευθεία ε: $y = 3x + 5$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ να βρεθεί το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x + 1)f(x) - 3x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x}$$

Υπόδειξη: θα ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x) = 5$

**Άσκηση 7** (Μελέτη και Χάραξη της C_f)

Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x - 1}$.

Άσκηση 8 (Μελέτη και Χάραξη της C_f)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \frac{4}{x^2}$.

- α) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
- β) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
- γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .
- δ) Να σχεδιάσετε την C_f .

Άσκηση 9 (επαναληπτικό θέμα)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 \cdot e^{-2x}$

- α) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
- β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι κυρτή ή κοίλη και τα σημεία καμπής.
- γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

**Άσκηση 10** (επαναληπτικό θέμα)

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(1) = 1$ και $xf(x) + x^2f'(x) = 1$ για κάθε $x > 0$.

- i. Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$
- ii. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
- iii. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
- iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f
- v. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $ex = e^{\alpha x}$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 11 (επαναληπτικό θέμα)

Να δείξετε ότι:

- i. $\ln x + \frac{1}{x} \geq 1$ για κάθε $x > 0$
- ii. Η συνάρτηση $g(x) = \ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$ έχει μοναδική ρίζα στο $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$.
- iii. Να μελετήσετε την συνάρτηση $f(x) = e^x \ln x$ ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα της και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- iv. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.



Άσκηση 12 (επαναληπτικό θέμα)

Θεωρούμε την συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} x + \eta\mu x & , x \leq 0 \\ \sqrt{\alpha x + \beta} & , x > 0 \end{cases}$ με $\alpha > 0$ και $\beta \in \mathbb{R}$

η οποία είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} .

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 4$ και $\beta = -1$

β) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Αν $g(x) = \ln x$ τότε να δείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = (g \circ f)(x)$ έχει τύπο $h(x) = \ln(\sqrt{4x+1} - 1)$ και αφού δείξετε ότι είναι συνάρτηση 1-1 έπειτα να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση h^{-1} .

Άσκηση 13 (επαναληπτικό θέμα)

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} e^x + a, & x \leq 0 \\ -x^2 + 3x, & x > 0 \end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι $a = 2$ και να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

γ) Να βρείτε την εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -x$.

δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu(f(x))}{f(x)}$.



Άσκηση 14 (επαναληπτικό θέμα)

Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x) = \frac{e^x}{x}$, $x \neq 0$ και $g(x) = \ln x$, $x > 0$.

α) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f = \varphi \circ g$.

Αν $f(x) = \frac{x}{\ln x}$, $0 < x \neq 1$, τότε:

β) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την f και να βρείτε τα ακρότατα.

γ) Να μελετήσετε την κυρτότητα της f και να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης

δ) Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και να τη σχεδιάσετε.

Άσκηση 15 (επαναληπτικό θέμα - 3ο Θέμα Πανελλήνιες 2009)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a^x - \ln(x + 1)$, $x > -1$ όπου $a > 0$ και $a \neq 1$

i. Αν ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$ να αποδείξετε ότι $a = e$.

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

iii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.

iv. Αν $\beta, \gamma \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\beta) - 1}{x - 1} + \frac{f(\gamma) - 1}{x - 2} = 0$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, 2)$.

ΚΑΛΟ ΔΙΑΒΑΣΜΑ !!!