<u>Άσκηση 1</u> *(Κρίσιμα σημεία-Πιθανά ακρότατα και σύνολο τιμών)*

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1, \quad x \in [-2,2]$

i. Βρείτε τα κρίσιμα σημεία της.

ii. Βρείτε τις πιθανές θέσεις των ακροτάτων της f.

iii. Βρείτε το σύνολο τιμών της f.

<u>Άσκηση 2</u> *(Κρίσιμα σημεία-Πιθανά ακρότατα και σύνολο τιμών)*

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot |x-1|, \quad x \in [0,2]$

i. Βρείτε τα κρίσιμα σημεία της.

ii. Βρείτε τις πιθανές θέσεις των ακροτάτων της f.

iii. Βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Υπόδειξη: $f(x) = x \cdot |x-1| \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x(x-1), & x \geq 1 \\ x(-x+1), & x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \geq 1 \\ -x^2 + x, & x < 1 \end{cases}$

<u>Άσκηση 3</u> *(Ανισοισότητα και εφαρμογή του Fermat)*

Για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει ότι: $a\ln x - x^2 \leq x - 2$ για κάθε x>0. Να αποδείξετε ότι α = 3.

<u>Άσκηση 4</u> *(Ανισοισότητα και εφαρμογή του Fermat)*

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to R$ για την οποία ισχύει $f(x^2 - x + 1) - f(1) \geq x - x^2$ για κάθε x > 0 (1). Να αποδείξετε ότι η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο A(1,f(1)) ειναι παράλληλη στην ευθεια (ζ): y=-x.

<u>Άσκηση 5</u> *(Εύρεση μονοτονίας ακροτάτων)*

Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα οι παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x) = xe^x$

β) $f(x) = \dfrac{x + ln\,x}{x}$

<u>Άσκηση 6</u> *(Εύρεση μονοτονίας ακροτάτων)*

Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα οι παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x - 2}$

β) $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$

γ) $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$

<u>Άσκηση 7</u> *(Εύρεση μονοτονίας ακροτάτων)*

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$.

α) να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

<u>Άσκηση 8</u> *(Εύρεση ακροτάτων σε κλαδική συνάρτηση)*

Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3, & x \leq 3 \\ x^2 - 8x + 22 & , x > 3 \end{cases}$$

<u>Άσκηση 9</u> *(Ακρότατα και λύση εξίσωσης)*

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ln(x+1) - x$

i) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

<u>Άσκηση 10</u> *(Ακρότατα και λύση εξίσωσης)*

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} - 2xe^{2x} - 1$

i) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

<u>Άσκηση 11</u> *(Ακρότατα και λύση εξίσωσης)*

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = 1 - 2ln\,x$ και την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to R$ για την οποία ισχύουν $f(e) = e^2 - 4$ και: $xf'(x) = 2x^2 - 4$, x > 0.

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) = x^2 - 4ln\,x$ για κάθε x > 0.

β) οι C_f και C_g έχουν μοναδικό κοινό σημείο.

γ) Στο κοινό τους σημείο οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτόμενη της οποία να βρείτε την εξίσωση.

Υπόδειξη: β) πρέπει να λύσουμε την εξίσωση f(x) = g(x)… Θεωρούμε την h(x) = f(x) - g(x) και την μελετάμε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα. γ) Για να έχουν κοινή εφαπτόμενη στο κοινό τους σημείο $M(x_0, f(x_0))$ θα πρέπει $f(x_0) = g(x_0)$ και $f'(x_0) = g'(x_0)$

<u>Άσκηση 12</u> *(Απόδειξη ανισοτήτων με την βοήθεια ακροτάτων)*

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2ln\,x - x^2 + 2013$

i) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να αποδείξετε ότι $x^2 - 2ln\,x \geq 1$ για κάθε x > 0.

<u>Άσκηση 13</u> *(Απόδειξη ανισοτήτων με την βοήθεια ακροτάτων)*

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{ln\,x}{x}$

i) Να βρείτε τα ακρότατα της f.

ii) Να αποδείξετε ότι $x^e \leq e^x$ για κάθε x > 0.

<u>Άσκηση 14</u> *(Απόδειξη ανισοτήτων με την βοήθεια ακροτάτων)*

α) Να αποδείξετε ότι $e^x - 1 \leq x \cdot e^x$ για κάθε $x \in R$.

β) Να αποδείξετε ότι $ln\,x \geq 1 - \dfrac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$.

<u>Άσκηση 15</u> (Βασικές ανισότητες)

Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = ln\left(x - ln\,x\right)$.

Υπόδειξη: Ισχύει ότι $ln\,x \leq x - 1 \Leftrightarrow x - ln\,x \geq 1$ άρα x - lnx > 0 για κάθε $x \in R$.

Άρα για το πεδίο ορισμού πρέπει: x >0 και x - lnx > 0 $\Leftrightarrow x > 0$ και $x \in R$ $\Leftrightarrow x > 0$

<u>Άσκηση 16</u> (Βασικές ανισότητες)

Να δείξετε ότι: i) $ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) < \dfrac{1}{x}, \quad x > 0$ ii) $e^{x-1} \geq x, \quad x \in R$

Υπόδειξη: i) θέστε στην lnx ≤ x - 1 όπου x το $1 + \dfrac{1}{x}$ ii) θέστε στην $e^x \geq x + 1$ όπου x το x-1. Η ισότητα θα ισχύει για x - 1 = 0 ⇔ x = 1.