Άσκηση 1 (ύπαρξη ρίζας της $f'(x) = \kappa$ με γνωστή την f(x)) - Πανελλήνιες 2000

Έστω $f:[0,1] \to R$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 2$ και $f(1) = 4$. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (0,1)$ ώστε η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_1, f(x_1))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x + 2000$

Άσκηση 2 (σχέση μεταξύ $f'(\xi_1), f'(\xi_2), f'(\xi_3)$)

Έστω μια συναρτησης f η οποία είναι συνεχής στο [0,5], παραγωγίσιμη στο (0,5) και ισχύει ότι: $f(5) = f(0) + 1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0,5)$ τέτοια ώστε: $2f'(\xi_1) + 3f'(\xi_2) = 1$.

Άσκηση 3 (σχέση μεταξύ $f'(\xi_1), f'(\xi_2), f'(\xi_3)$)

Έστω μια συνάρτηση f για την οποία ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Rolle στο [1,3]. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1,3)$ τέτοια ώστε: $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$.

Άσκηση 4 (Θ.Μ.Τ και Θ. Bolzano) - Πανελλήνιες 2001

Δίνεται συνάρτηση $f:[\alpha, \beta] \to R$ η οποία είναι συνεχής στο [α,β], παραγωγίσιμη στο (α,β) και ισχύει ότι: $f(\alpha) = 2\beta$ και $f(\beta) = 2\alpha$. Να αποδείξετε ότι:

i. Η εξίσωση $f(x) = 2x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β).

ii. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε: $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = 4$

Happy School
Πρότυπο Κέντρο Εκπαίδευσης

<u>Άσκηση 5</u> (Θ.Μ.Τ και Θ. Bolzano)

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει $f(1) = 2$ και $f(3) = 8$. Να αποδείξετε ότι:

i. Υπάρχει $x_0 \in (1,3)$ τέτοιο ώστε: $f(x_0) = 6$

ii. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1,3)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοια ώστε: $\dfrac{2}{f'(\xi_1)} + \dfrac{1}{f'(\xi_2)} = 1$.

<u>Άσκηση 6</u> (Θ.Μ.Τ και Θ. Bolzano) - SOS

Η συνάρτηση $f: R \to R$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν οι σχέσεις:

- $f(2) = 2$
- $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{\eta\mu 3x} = 3$
- $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,2)$

α) Ποια είναι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A\left(0, f(0)\right)$;

β) Η εξίσωση $f'(x) = 0$ μπορεί να έχει δυο διαφορετικές ρίζες στο διάστημα (0,2);

γ) Εξετάστε αν υπάρχει $\xi \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 2 - \xi$.

δ) Επίσης εξετάστε αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0,2)$ τέτοια ώστε $f'(x_1) \cdot f'(x_2) = 1$

<u>Άσκηση 7</u> (διαδοχικά Θ.Μ.Τ και Θ.Rolle - Πρόσημο της $f'(\xi), f''(\xi)$)

Δίνεται συνάρτηση $f: R \to R$ δυο φορές παραγωγίσιμη, της οποία η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α(1,5), Β(2,-4), Γ(3,2). Να αποδείξετε ότι:

i. υπάρχουν $x_1, x_2 \in (1,3)$ τέτοια ώστε: $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

ii. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,3)$, ώστε $f''(\xi) > 0$.

Υπόδειξη: στο ii Θ.Μ.Τ στα $[x_1, 2]$ και $[2, x_2]$ και έπειτα Θ.Μ.Τ για την f' στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$.

<u>Άσκηση 8</u> (απόδειξη ανισοτήτων με Θ.Μ.Τ και μονοτονία της $f'(x)$)

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο R και η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο R. Να δείξετε ότι $f(x+1) - f(x) < f'(x) < f(x) - f(x-1)$ για κάθε $x \in R$.

Υπόδειξη: Θ.Μ.Τ στα $[x-1, x]$ και $[x, x+1]$. Έπειτα εκμεταλλευόμαστε την μονοτονία της f΄.

<u>Άσκηση 9</u> (απόδειξη ανισοτήτων με Θ.Μ.Τ και μονοτονία της $f'(x)$) - Πανελλήνιες 2006

Να αποδείξετε ότι $ln(x+1) - ln\,x < \dfrac{1}{x}$, x>0.

Υπόδειξη: Η συνάρτηση φαίνεται ότι είναι η $f(x) = ln\,x$. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ για την f στο [x,x+1].

<u>Άσκηση 10</u> (απόδειξη ανισοτήτων με Θ.Μ.Τ και μονοτονία της $f'(x)$)

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο R και η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$. Αν ισχύει ότι $f(0) = 0$ να αποδείξετε ότι $f'(x) < \dfrac{f(x)}{x}$ για κάθε x>0.

Υπόδειξη: είναι $f'(x) < \dfrac{f(x)}{x} \Leftrightarrow f'(x) < \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$. Άρα εφαρμόζω Θ.Μ.Τ για την f στο [0,x].

<u>Άσκηση 11</u> (σταθερή συνάρτηση ορισμένη σε διάστημα)

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to R$ για την οποία ισχύει f(4) = 3 και $xf'(x) = 3x - 2f(x)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = x^2 f(x) - x^3$ είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$.

ii. Να βρείτε τον τύπο της f.

Happy School
Πρότυπο Κέντρο Εκπαίδευσης

Άσκηση 12 (Εύρεση της f - απλή μορφή)

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f:(0,+\infty)\to R$ που έχει παράγωγο $f'(x)=2e^x+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}$ όταν f(1) = 2e.

Άσκηση 13 (Εύρεση της f - αρχική γινόμενου ή πηλίκου)

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f:(1,+\infty)\to R$ αν ισχύει $x\cdot f'(x)\cdot ln\,x+f(x)=2x^2$ και $f(e)=e^2$.

Άσκηση 14 (Εύρεση της f - αρχική γινόμενου ή πηλίκου)

Έστω $f:(0,+\infty)\to R$ με f(1) = 2 και $xf'(x)-f(x)=x$ για κάθε x > 0. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Άσκηση 15 (Εύρεση της f - αρχική συνθέτης συνάρτησης) - Πανελλήνιες 2005

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R τέτοια ώστε να ισχύει η σχέση: $2f'(x)=e^{x-f(x)}$ για κάθε $x\in R$ και f(0) = 0. Να δείξετε ότι $f(x)=ln\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)$.

Άσκηση 16 (Εύρεση της f - αρχική συνθέτης συνάρτησης)

Έστω $f:R\to R$ με f(0) = 2, $f(x)>1$ και $f'(x)-e^x\sqrt{f(x)-1}=0$ για κάθε x > 0. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Υπόδειξη: $f'(x)-e^x\sqrt{f(x)-1}=0 \Leftrightarrow f'(x)=e^x\sqrt{f(x)-1} \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)-1}}=e^x \Leftrightarrow \ldots$

ΚΑΛΟ ΔΙΑΒΑΣΜΑ !!!