<u>Άσκηση 1</u> (εύρεση αρχικής σύνθετης συνάρτησης)

Να βρείτε μια παράγουσα των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = (2x - 3) \cdot (x^2 - 3x + 1)^2$ ii. $f(x) = (3x^2 - 2) \cdot (x^3 - 2x + 1)^2$

iii. $f(x) = \dfrac{x}{\left(x^2 + 1\right)^3}$ iv. $f(x) = \dfrac{3x}{\left(x^2 + 3\right)^2}$ v. $f(x) = x \cdot \sqrt{x^2 + 1}$

vi. $f(x) = \sigma\upsilon\nu x \cdot e^{\eta\mu x}$ vii. $f(x) = \eta\mu x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}$ viii. $f(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{1 + e^x}}$

ix. $f(x) = \dfrac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}$ x. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ xi. $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}, x > 1$

<u>Άσκηση 2</u> (εύρεση αρχικής συνάρτησης με την βοήθεια των κανόνων παραγώγισης)

Έστω $f : R \to R$ μια συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη. Να βρείτε μια παράγουσα (αρχική) G των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $g(x) = (x^2 + 3) \cdot f'(x) + 2xf(x)$ ii. $g(x) = xf'(x) + f(x)$

iii. $g(x) = f'(x)\sigma\upsilon\nu x - f(x)\eta\mu x$ iv. $g(x) = \dfrac{(x - 1)f'(x) - f(x)}{(x - 1)^2}$, x>1

v. $g(x) = \dfrac{f'(x)\eta\mu x - f(x)\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}$ vi. $g(x) = 2f(x)f'(x) + 3x^2$

vii. $g(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)} + f'(x)e^{f(x)}$, f(x) > 0. viii. $g(x) = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} - \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}$, f(x) > 0

<u>Άσκηση 3</u> (ύπαρξη ρίζας της f(x)=0 με εφαρμογή του Θ. Rolle σε μια αρχική F(x) της f(x))

Να δειχθεί ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μια τουλάχιστον ρίζα στο αντίστοιχο διάστημα:

i. $4x^3 + 9x^2 - 4 = 0$ στο (-2,1)

ii. $(3x^2 - 1)\eta\mu x + (x^3 - x)\sigma\upsilon\nu x = 0$ στο (0,1)

<u>Άσκηση 4</u> (ύπαρξη ρίζας της f(x)=0 με εφαρμογή του Θ. Rolle σε μια αρχική F(x) της f(x))

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f: $R \to R$ για την οποία ισχύει $f(1) - f(0) = e$.

Να αποδείξετε ότι:

α) η εξίσωση $f'(x) - 2x = e^x$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα (0,1).

β) η εξίσωση $\dfrac{f'(x)}{x} + 3x = \dfrac{e}{x} + 2$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα (0,1).

Υπόδειξη: στο β πολλαπλασιάστε με x, έπειτα μεταφέρετε τα όλα στο α μέλος και θεωρήστε συνάρτηση g(x). Βρείτε μια αρχική της g έτσι ώστε G΄(x) = g(x) και εκτελεστέ στο [0,1] Θ.Rolle για την G.

<u>Άσκηση 5</u> (ύπαρξη ρίζας της f(x)=0 με εφαρμογή του Θ. Rolle σε μια αρχική F(x) της f(x))

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f: $R \to R$ για την οποία ισχύει $f(6) = 3f(2)$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (2,6)$ τέτοιο ώστε: $\xi f'(\xi) = f(\xi)$.

Υπόδειξη: θέτω όπου ξ το x και έχω $xf'(x) = f(x) \Leftrightarrow f'(x)\cdot x - f(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x)\cdot x - f(x)\cdot(x)' = 0 \Leftrightarrow$
$\dfrac{f'(x)\cdot x - f(x)\cdot(x)'}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{f(x)}{x}\right)' = 0$. Άρα θεωρώ $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ στο [2,6] …

Happy School
Πρότυπο Κέντρο Εκπαίδευσης

Άσκηση 6 (ύπαρξη ρίζας της f(x)=0 με εφαρμογή του Θ. Rolle σε μια αρχική F(x) της f(x))

Έστω μια συνάρτηση f, συνεχής στο [2,3] παραγωγίσιμη στο (2,3) με $f(3) = 2f(2)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (2,3)$ τέτοιο ώστε η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από το σημείο A(1,0).

Άσκηση 7 (ύπαρξη ρίζας της f(x)=0 με εφαρμογή του Θ. Rolle σε μια αρχική F(x) της f(x))

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο [1,2] και παραγωγίσιμη στο (1,2) με f(2) = 2 και f(1) = 1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) \cdot f(x) = 1$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1,2).

Άσκηση 8 (τέχνασμα εύρεσης αρχικής με πολλαπλασιασμό με $e^{G(x)}$)

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R \to R$ για την οποία ισχύει $f(1) = f(2) = 0$. Ν αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 2 \cdot \xi \cdot f(\xi)$.

Άσκηση 9 (τέχνασμα εύρεσης αρχικής με πολλαπλασιασμό με $e^{G(x)}$)

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R \to R$ με f(2) > 0 και f(1) > 0, για την οποία ισχύει $lnf(1) = 3 + lnf(2)$. Να. Αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) + 2xf(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (1,2).

<u>Άσκηση 10</u> (Η f(x) = 0 έχει ακριβώς κ ρίζες)

Δίνεται η συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει ότι $f(1) - f(0) = 2$ και $f''(x) < 2$ για κάθε $x \in R$. Να δείξετε ότι υπάρχει <u>μοναδικός</u> αριθμός $\xi \in (0,1)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi) = 4\xi^3 + 2\xi$.

Υπόδειξη: όλα στο α μέλος και θεωρούμε συνάρτηση g(x). Δεν μπορούμε να εκτελέσουμε Bolzano όποτε βρίσκουμε μια αρχική G(x) της g(x) και εκτελούμε Θ. Rolle στο [0,1]. Άρα η g(x) = 0 έχει τουλάχιστον μια λύση ξ_1 στο (0,1). Έπειτα θεωρούμε ότι έχει και δεύτερη λύση έστω ξ_2. Εκτελούμε Θ.Rolle στο $[\xi_1, \xi_2]$ και καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα η λύση ξ_1 θα είναι η μοναδική λύση της g(x) = 0 άρα ισοδύναμα και της αρχικής δοσμένης εξίσωσης.

<u>Άσκηση 11</u> (Η f(x) = 0 έχει ακριβώς κ ρίζες)

Δίνεται η συνάρτηση f με $f'(x) \neq e^x$ για κάθε $x \in R$. Αν 0 <f(x) < 1 για κάθε $x \in [0,1]$ να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = e^{x_0} - 1$.

Υπόδειξη: Για τουλάχιστον μια Bolzano στην g(x) = $f(x) - e^x - 1$. Για το πολύ μια Rolle για την g με άτοπο.

<u>Άσκηση 12</u> (Διαδοχικές εφαρμογές του Θ. Rolle)

Δίνεται η συνάρτηση $f : R \to R$ δυο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει ότι $f(0) = f(1) = f(2)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

Άσκηση 13 (Συνδυαστικό θέμα σε Bolzano και Rolle- SOS θέμα)

Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ δυο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει ότι:

- $f'(-2) = 16$ και $f'(-1) = 9$
- $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - \eta\mu 3x}{x^2 - x} = 2$

i. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (-2, -1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = e^{-2\xi}$.

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M\left(0, f(0)\right)$.

iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f''(x) + 2f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο (-2,0).

Υπόδειξη: στο iii κατασκευάζω αρχική πολλαπλασιάζοντας με e^{2x}. Έπειτα εκτελώ Θ.Rolle στο (ξ,0) που είναι υποσύνολο του (-2,-1).

Άσκηση 14 (Συνδυαστικό θέμα σε Bolzano και Rolle- SOS θέμα)

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει $f(1) = 4$ και $f(2) = 3$.

Να αποδείξετε ότι:

α) υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε: $f(x_0) = x_0^2$

β) υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε: $f(\xi) + \xi f'(\xi) = f'(\xi) + 3\xi^2 - 2\xi$

Υπόδειξη: στο ii κατασκευάζω από την εξίσωση μια αρχική και εκτελώ Rolle στο $[1, x_0]$

<u>Άσκηση 15</u> (Εφαρμογή του Θ.Μ.Τ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x$ με $x \in [0,4]$

i. Να δείξετε ότι η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο [0,4].

ii. Να βρείτε το $\xi \in (0,4)$.

<u>Άσκηση 16</u> (Εφαρμογή του Θ.Μ.Τ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{lnx}{x-1}$. Να δείξετε ότι:

i. Ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την f στο διάστημα $[e, e^2]$.

ii. Υπάρχουν τουλάχιστον ένα $\xi \in (e, e^2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) < 0$.

iii. $f(\xi) > \dfrac{1}{\xi}$

Υπόδειξη: στο iii εκκινούμε απο το ότι $f'(\xi) < 0$ και με κατάλληλες αλγεβρικές πράξεις καταλήγουμε στο ζητούμενο.

ΚΑΛΟ ΔΙΑΒΑΣΜΑ !!!