



**Άσκηση 1** (Εξίσωση εφαπτομένης όταν γνωρίζουμε το σημείο επαφής  $M(x_0, f(x_0))$ )

Να βρείτε την εφαπτόμενη της  $C_f$  στο  $M(x_0, f(x_0))$  στις παρακάτω περιπτώσεις:

α)  $f(x) = x \ln x$ , με  $M(e, f(e))$

β)  $f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^2 + 3}$ , με  $M(1, f(1))$

**Άσκηση 2** (Εξίσωση εφαπτομένης όταν γνωρίζουμε την κλίση της)

Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της καμπύλης της  $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 1}$  που είναι παράλληλες στον άξονα  $x'$ .

**Άσκηση 3** (Εξίσωση εφαπτομένης όταν γνωρίζουμε την κλίση της)

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ . Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν σημεία της καμπύλης της  $f$  ώστε οι εφαπτομένες σε αυτά να είναι παράλληλες στην ευθεία  $\zeta: y = 2x$ .

**Υπόδειξη:** Η εφαπτόμενη της  $C_f$  στο τυχαίο  $M(x, f(x))$  θα έχει κλίση  $f'(x)$ . Άρα για να είναι παράλληλη στην ευθεία  $y = 2x$  θα πρέπει να ισχύει  $f'(x) = 2$ . Εφόσον ζητάει ν.δ.ο δεν υπάρχουν τέτοια σημεία αρκεί ν.δ.ο η εξίσωση  $f'(x) = 2$  είναι αδύνατη.

**Άσκηση 4** (Εξίσωση εφαπτομένης που διέρχεται από σημείο το οποίο δεν ανήκει στην  $C_f$ )

Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της καμπύλης της συνάρτησης  $f(x) = x^2 + 1$  που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.



**Άσκηση 5** (Εξίσωση εφαπτομένης που διέρχεται από σημείο το οποίο δεν ανήκει στην  $C_f$ )

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{7 - 2x}{3 - x}$ . Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας της καμπύλης της  $f$  που διέρχεται από το σημείο  $A(3,0)$ .

**Άσκηση 6** (Συνθήκες για να εφάπτεται μια ευθεία στην  $C_f$ )

Να αποδείξετε ότι η ευθεία ( $\zeta$ ):  $y = -3x + 6$  εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = x^2 - 5x + 7$ .

**Άσκηση 7** (Συνθήκες για να εφάπτεται μια ευθεία στην  $C_f$ )

Αν η ευθεία  $y = 2ax - \beta$  εφάπτεται στην γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = x^2 - 3x$  στο σημείο  $M(1, f(1))$ , να βρείτε τα  $\alpha, \beta$ .

**Άσκηση 8** (Κοινή εφαπτόμενη δυο γραφικών παραστάσεων σε κοινό τους σημείο)

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = x^3 - 3x + 4$  και  $g(x) = 3x^2 - 3x$ . Να αποδείξετε ότι οι  $C_f, C_g$  στο κοινό σημείο τους έχουν κοινή εφαπτόμενη της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

**Υπόδειξη:** τις τετμημένες των κοινών σημείων της βρίσκω λύνοντας την  $f(x) = g(x)$ .



**Άσκηση 9** (Κοινή εφαπτόμενη δυο γραφικών παραστάσεων σε μη κοινό τους σημείο)

Να βρείτε της εξίσωση της κοινής εφαπτομένης των γραφικών παραστάσεων  $f(x) = x^2$  και  $g(x) = \frac{1}{x}$ .

**Άσκηση 10** (Εφαπτομένες και Bolzano)

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 \cdot e^x$ . Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο  $A$  της  $C_f$  με τετμημένη  $x_1 \in (0,1)$ , ώστε η εφαπτόμενη της  $C_f$  στο  $A$  να είναι παράλληλη στην ευθεία  $(\zeta): y = 6x + 2024$ .

**Άσκηση 11** (Εφαπτομένες και Bolzano)

Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα  $x_0 \in (0,1)$ , ώστε η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x) = \ln x - 2x^2$  στο σημείο  $M(x_0, f(x_0))$ , να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

**Υπόδειξη:** Η εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο  $M(x_0, f(x_0))$  είναι η  $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ . Εφόσον διέρχεται από το  $O(0,0)$  αυτό σημαίνει ότι το σημείο αυτό πρέπει να επαληθεύει την εξίσωση της. Άρα πρέπει  $0 - f(x_0) = f'(x_0)(0 - x_0) \Leftrightarrow x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0$ . Αρκεί επομένως ν.δ.ο η εξίσωση  $x f'(x) - f(x) = 0$  έχει ακριβώς μια λύση στο  $(0,1)$ . Θεωρώ  $g(x) = x f'(x) - f(x) = \dots - 2x^2 - \ln x + 1$  και κάνω Bolzano στο  $[0,1]$  η σε κάποιο υποδιάστημα. Επίσης για να εξασφαλίσω ότι η λύση θα είναι μοναδική βρίσκω και την μονοτονία της  $g$ .

**Άσκηση 12** (Εφαπτόμενη αντίστροφης)

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 + x + 1$ .

- i. Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- ii. Να βρείτε την εφαπτόμενη της  $C_{f^{-1}}$  στο  $x_0 = 3$  αν θεωρήσουμε ότι η  $f^{-1}$  είναι παραγωγίσιμη.

**Άσκηση 13** (Ρυθμός μεταβολής - Κίνηση σημείου πάνω σε καμπύλη)

Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της απόστασης του τυχαίου σημείου  $M$  που ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = e^x$  από την αρχή των αξόνων ως προς  $x$ , την χρονική στιγμή  $t_0$  που ισχύει  $x(t_0) = 0$ .

**Άσκηση 14** (Ρυθμός μεταβολής - Κίνηση σημείου πάνω σε καμπύλη)

Δίνεται το σημείο  $M(x,y)$  το οποίο ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = e^x$ ,  $x > 0$ . Αν  $A(x^2, 0)$  να βρείτε:

- α) Το εμβαδόν  $E$  του τριγώνου  $MOA$  ως συνάρτηση του  $x$ .
- β) Τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου  $MOA$  ως προς  $x$  την χρονική στιγμή που είναι  $x = 1$ .

**Άσκηση 15** (Ρυθμός μεταβολής - Εμβαδόν)

Σε ένα ορθογώνιο  $ABΓΔ$  η πλευρά  $AB$  αυξάνεται με ρυθμό  $2 \text{ cm / sec}$ , ενώ η πλευρά  $ΒΓ$  ελαττώνεται με ρυθμό  $3 \text{ cm / sec}$ . Να βρείτε :

- i. Τον ρυθμό μεταβολής της περιμέτρου του ορθογωνίου,
- ii. Τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου, όταν :  $AB=10\text{cm}$  και  $ΒΓ=6\text{cm}$ .

**ΚΑΛΟ ΔΙΑΒΑΣΜΑ !!!**