<u>Άσκηση 1</u> (παράγωγος συναρτησιακής σχέσης)

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει ότι:

$$f^3(x) + 3xf(x) = x^3 - 1, \quad x \in R$$

Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0)$ και $f'(0)$.

<u>Άσκηση 2</u> (παράγωγος συναρτησιακής σχέσης)

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει ότι:

$$e^{xf(x)} + 3f(x) = 19, \quad x \in R$$

Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0)$ και $f'(0)$.

<u>Άσκηση 3</u> (παράγωγος και αντίστροφη συνάρτηση)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x$.

i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

ii. Αν γνωρίζετε ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη τότε να βρείτε την τιμή $\left(f^{-1}\right)'(3)$

<u>Άσκηση 4</u> (παράγωγος και αντίστροφη συνάρτηση)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x$

i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

ii. Αν γνωρίζετε ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη τότε να υπολογίσετε την τιμή $\left(f^{-1}\right)'(1)$.

Happy School
Πρότυπο Κέντρο Εκπαίδευσης

<u>Άσκηση 5</u> (παράγωγος συναρτησιακής σχέσης και υπολογισμός ορίου)

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(\eta\mu x) + f(\sigma\upsilon\nu x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x + 1$ για κάθε $x \in R$. Αν η C_f διέρχεται από το A(1,1) να βρείτε:

i. Το σημείο τομής της C_f με τον άξονα y΄y.

ii. Το $f'(0)$.

iii. Το όριο $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x) - \sqrt{x+1}}{\eta\mu x}$

Υπόδειξη: i. Ζητάει το σημείο (0,f(0)). Άρα αρκεί να βρεθεί το f(0). Ii. Παραγωγίστε την σχέση και θέστε όπου x = 0. iii. Έχουμε πλεον εις γνώσιν μας οτι $f'(0) = 1$. Αρα $f'(0) = \lim_{x\to 0}\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\dfrac{f(x) - 1}{x} = 1$.

Οποτε στο όριο που δινεται να υπολογίσουμε θα σχηματίσουμε μέσα του με κατάλληλες πράξεις την παράσταση $\dfrac{f(x) - 1}{x}$. Έπειτα τα επιμέρους όρια που θα υπάρχουν μέσα του θα είναι υπολογίσιμα.

<u>Άσκηση 6</u> (παράγωγος συνάρτησης μορφής $\sqrt[\nu]{\left(f(x)\right)^{\kappa}}$ με κ = περιττό)

Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \sqrt[6]{x^5}$ β) $f(x) = \sqrt[4]{(x^2 - 4)^3}$

Happy School
Πρότυπο Κέντρο Εκπαίδευσης

<u>Άσκηση 6</u> (παράγωγος συνάρτησης μορφής $\sqrt[\nu]{\left(f(x)\right)^{\kappa}}$ με κ = άρτιο)

Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$ β) $f(x) = \sqrt[5]{(x-1)^4}$

<u>Άσκηση 7</u> (Εξίσωση εφαπτομένης όταν γνωρίζουμε το σημείο επαφής $M\left(x_0, f(x_0)\right)$).

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο επαφής M όταν:

α) $f(x) = x^2 - 4x$ και $M\left(3, f(3)\right)$

β) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \leq 1 \\ 2x^2 + 1 & x > 1 \end{cases}$ και $M\left(1, f(1)\right)$

<u>Άσκηση 8</u> (Εξίσωση εφαπτομένης όταν γνωρίζουμε την κλίση της)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 3x$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) η εφαπτόμενη έχει συντελεστή διεύθυνσης 5,

β) η εφαπτόμενη είναι παράλληλη στην ευθεία ζ: y = x + 5

γ) Είναι κάθετη στον ευθεία η: x - 3y +12 = 0

δ) σχηματίζει γωνία 135^o με τον άξονα x΄x.

<u>Άσκηση 9</u> (Εξίσωση εφαπτομένης που διέρχεται από σημείο το οποίο δεν ανήκει στην C_f)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 6x$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που διέρχεται από το σημείο A(-3,-10).

<u>Άσκηση 10</u> (Εξίσωση εφαπτομένης και θεώρημα Bolzano !!!)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^2$ με $x \in [0, +\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μια τουλάχιστον εφαπτομένης της C_f που τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο με τεταγμένη -2020.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μια μοναδική εφαπτόμενη της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία:

$$\zeta : y = 2020x + 2030$$

Υπόδειξη: α) γράψτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) με σημείο επαφής το $M\left(x_0, f(x_0)\right)$. Έπειτα το A(0,-2020) θα ανήκει στην (ε) άρα θα πρέπει να επαληθεύει την εξίσωση της. Όποτε καταλήγετε σε μια εξίσωση. Τα πάμε όλα στο α μέλος και θεωρούμε συνάρτηση για την οποία εκτελούμε Bolzano στο $[0, +\infty)$. β) Αρκεί ν.δ.ο υπάρχει μοναδικό $x_0 \in [0, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 2020$ $\Leftrightarrow e^{x_0} + 2x_0 - 2020 = 0$. Θεωρούμε συνάρτηση, βρίσκουμε μονοτονία, εκτελούμε Bolzano … άρα το x_0 θα είναι μοναδικό.

ΚΑΛΟ ΔΙΑΒΑΣΜΑ !!!