**<u>Άσκηση 1</u>** (Ύπαρξη τουλάχιστον μιας ρίζας όταν δεν εφαρμόζεται Bolzano στο [α,β] ή όταν δεν γνωρίζω το διάστημα)

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3x + lnx = x^2 + 1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0,1).

**Υπόδειξη**: Η συνάρτηση $f(x) = 3x + lnx - x^2 - 1$ έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$. Θα αναζητήσω επομένως μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1). Στο 0 όμως η f δεν ορίζεται όποτε παίρνω το όριο $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \ldots = -\infty$. Άρα υπάρχει α κοντά στο 0 τέτοιο ώστε f(α) < 0. Άρα εκτελώ Bolzano στο [α,1]….

**<u>Άσκηση 2</u>** (Ύπαρξη τουλάχιστον μιας ρίζας όταν δεν εφαρμόζεται Bolzano στο [α,β] ή όταν δεν γνωρίζω το διάστημα)

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $lnx + (x - a)^2 = 0, \quad a \neq 1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0,1).

**<u>Άσκηση 3</u>** (Ύπαρξη τουλάχιστον μιας ρίζας όταν δεν εφαρμόζεται Bolzano στο [α,β] ή όταν δεν γνωρίζω το διάστημα)

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $lnx + x = e^{-2x}$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

**<u>Άσκηση 4</u>** (Πρόσημο συνεχούς συνάρτησης)

Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f σε όλο το πεδίο ορισμού της για κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ ii) $g(x) = x^4 - 9x^2$

**<u>Άσκηση 5</u>** (Πρόσημο συνεχούς συνάρτησης)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu x - 1.$

α) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{f(x)}$

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\left(\frac{3}{4}\right)\left(e^x - 1\right) = f(1) \cdot (x - 2)$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα (0,2).

**Υπόδειξη:**

α) όπως κάναμε την αντίστοιχη άσκηση μέσα στο μάθημα.

β) στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ θα είναι f(x) > 0 σύμφωνα με το α ερώτημα. Άρα $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0^+} =$..

γ) από α ερώτημα είναι f(x) <0 στο $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$. Όποτε επειδή $1 \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ θα είναι f(1) < 0. Ομοίως εργαζόμαστε για να βρούμε το πρόσημο του $f\left(\frac{3}{4}\right)$.

***ΚΑΛΟ ΔΙΑΒΑΣΜΑ !!!***