

**Άσκηση 1** (εξέταση του προϋποθέσεων του Θεωρήματος Bolzano)

Να εξετάσετε αν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano από την συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$ στο διάστημα $[-1, e]$.

Άσκηση 2 (μια τουλάχιστον λύση στο ανοικτό (α, β))

Να δείξετε ότι η εξίσωση $1 + \sin x = x$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Άσκηση 3 (μια τουλάχιστον λύση στο ανοικτό (α, β) για εξίσωση με παρονομαστές)

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{e^x}{x-1} + \frac{\ln x}{x-2} = 0$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $(1, 2)$.

Άσκηση 4 (Υπαρξη σημείου τομής)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 - 4x - 2$ και η συνάρτηση $g(x) = -e^{-x} - 4$. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη στο διάστημα $(0, 1)$.