



Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^5 + x + 3$ η οποία έχει σύνολο τιμών το \mathbb{R} .

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} .

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $f^{-1}(f(x^2 - 3) - 4) > 0$

Υπόδειξη: ισχύει ότι: $f(0) = 3 \Leftrightarrow f^{-1}(3) = 0$ άρα η ανίσωση γίνεται $f^{-1}(f(x^2 - 3) - 4) > f^{-1}(3) \dots$

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-2} + x - 1$ η οποία έχει σύνολο τιμών το \mathbb{R} .

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} .

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $e^{x^5+x^3-2} + x^5 + x^3 = 2f^{-1}(e + 2) - 3$.

Υπόδειξη: Ισχύει $f(3) = e + 2 \Leftrightarrow f^{-1}(e + 2) = 3$

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 - x + 12$ η οποία έχει σύνολο τιμών το \mathbb{R} .

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

β) Να υπολογίσετε την τιμή $f^{-1}(14)$.

γ) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f^{-1} με την ευθεία $y = x$.



Παρατήρηση: Προσοχή. Όταν ζητάει να αποδείξετε ότι μια συνάρτηση αντιστρέφεται ουσιαστικά ζητάει να αποδείξετε ότι η συνάρτηση αυτή είναι 1 - 1. Δεν σας ζητάει επομένως να βρείτε και την f^{-1} . Αυτό θα πρέπει να δηλώνεται ρητά από την εκφώνηση. Π.χ να ορίσετε την f^{-1} .

Άσκηση 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $g(x) = f(2x - 5) - f(4 - x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα τότε:

- Να μελετήσετε την συνάρτηση g ως προς την μονοτονία.
- Να λύσετε την ανίσωση $g(e^x - 2) > 0$.

Άσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση f , γνησίως μονότονη στο \mathbb{R} , της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(5,9)$ και $B(2,3)$.

- Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- Να λύσετε την εξίσωση : $f(3 + f^{-1}(x^2 + 2x)) = 9$.

Άσκηση 6

Να βρεθούν τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = 2x - 1$ και της αντίστροφης της.