Ασκήσεις

Άσκηση 1 (Άθροισμα και γινόμενο ριζών- Τύποι Βιετά)

Να βρείτε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών των παρακάτω εξισώσεων χωρίς να τις λύσετε

(i) $x^2 + 3x - 2 = 0$ (ii) $2x^2 - 7x + 4 = 0$

Άσκηση 2 (Κατασκευή εξίσωσης μέσω των ριζών της)

Να βρείτε τις εξισώσεις που έχουν ρίζες τα ζεύγη των αριθμών:

i) 2,4 ii) $\sqrt{3} + 2 \, , 2 - \sqrt{3}$

Άσκηση 3 (παραμετρικές-πλήθος ριζών)

Δίνεται η εξίσωση $\mu^2 x^2 + \mu(1 + 5\mu)x - (2 + 5\mu) = 0 \quad , \mu \neq 0$

i) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες στο R για κάθε μ ≠ 0
ii) Να λυθεί η εξίσωση αυτή

Άσκηση 4 (παραμετρικές-πλήθος ριζών)

Να βρείτε το πλήθος των ριζών των εξισώσεων για τις διάφορες τιμές του λ:

i) $x^2 - (2\lambda - 4)x - \lambda(3 - \lambda) = 0$ ii) $(\lambda - 3)x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda + 3 = 0$

Άσκηση 5 (Παραμετρικές- προσδιορισμός παραμέτρου)

Η εξίσωση $x^2 + (\lambda - 3)x - \lambda + 6 = 0$ (1) έχει μια διπλή ρίζα

i) Να βρείτε τις τιμές του λ
ii) Για κάθε τιμή του λ που προέκυψε, να βρείτε τη διπλή ρίζα της εξίσωσης (1)

Υπενθύμιση:

Τρόπος μελέτης μαθηματικών:

1. Διαβάζουμε αναλυτικά την θεωρία του αντίστοιχου φυλλαδίου.
2. Διαβάζουμε προσεκτικά την μεθοδολογία και τις λυμένες ασκήσεις.
3. Λύνουμε τις ασκήσεις που έχουμε κοιτώντας τις αντίστοιχες λυμένες.

ΚΑΛΟ ΔΙΑΒΑΣΜΑ !!!

Ασκήσεις από Τράπεζα Θεμάτων

Happy School
Πρότυπο Κέντρο Εκπαίδευσης

Θέμα 1238

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης: $-2x^2+10x=12$.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\dfrac{-2x^2+10x-12}{x-2}=0$

Λύση

α) Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$-2x^2+10x-12=0 \overset{:(-2)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow x^2-5x+6=0$$

Για $\alpha=1$, $\beta=-5$ και $\gamma=6$, βρίσκουμε:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6=25-24=1>0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm 1}{2}=\begin{cases}\frac{5+1}{2}=3\\ \frac{5-1}{2}=2\end{cases}$$

β) Πρέπει:

$$x-2\neq 0\Leftrightarrow x\neq 2$$

Τότε ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$\frac{-2x^2+10x-12}{x-2}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x^2+10x-12=0 \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (x=3 \text{ ή } x=2)$$

Η ρίζα $x=2$ απορρίπτεται λόγω του περιορισμού.

Τελικά η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα την $x=3$.

Happy School
Πρότυπο Κέντρο Εκπαίδευσης

Θέμα 1290

Δίνεται η εξίσωση x^2-(λ-1)x+6=0, (1) με παράμετρο $λ\in\mathbb{R}$.

α) Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση το *1*,να βρείτε το *λ*.

β) Για *λ=2* να λύσετε την εξίσωση (1)

Λύση

α) Αφού η εξίσωση (1) έχει λύση το 1, ισχύει ότι:

$$1^2 - (λ - 1)1 + 6 = 0 \Leftrightarrow 1 - λ + 1 + 6 = 0 \Leftrightarrow 8 - λ = 0 \Leftrightarrow λ = 8$$

β) Για λ = 2 η εξίσωση γράφεται:

$$x^2 - (2 - 1)x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 6 = 0$$

Για α = 1, β = – 1 και γ = 6, βρίσκουμε:

$$Δ = β^2 - 4αγ = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1 - 24 = -23 < 0$$

Άρα η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Θέμα 1312

Δίνεται η εξίσωση: $λx^2 - (λ-1)x - 1 = 0$, με παράμετρο $λ \neq 0$.

α) Να βρείτε την τιμή του *λ* για την οποία η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -2 .

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $λ \neq 0$.

Λύση

α) Η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό – 2 αν και μόνο αν ισχύει:

$$λ(-2)^2 - (λ - 1)(-2) - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4λ + 2(λ - 1) - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4λ + 2λ - 2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6λ = 3 \Leftrightarrow λ = \frac{3}{6} \Leftrightarrow λ = \frac{1}{2}$$

β) Το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda - 1)x - 1$ έχει $\alpha = \lambda$, $\beta = -(\lambda - 1)$, $\gamma = -1$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma =$$
$$= (-(\lambda - 1))^2 - 4 \cdot \lambda \cdot (-1) =$$
$$= \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 4\lambda =$$
$$= \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$$

Επειδή είναι $\Delta = (\lambda + 1)^2 \geq 0$, για κάθε $\lambda \neq 0$ η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.

Θέμα 1412

Δίνεται η εξίσωση: $\left(\lambda^2 - \lambda\right) \cdot x^2 - \left(\lambda^2 - 1\right) x + \lambda - 1 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) παίρνει τη μορφή : $\lambda x^2 - (\lambda+1)x + 1 = 0$ (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 7)

δ) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1), αν αυτή είναι 2^{ου} βαθμού. (Μονάδες 6)

Λύση

α) Η εξίσωση (1) είναι 2^{ου} βαθμού αν και μόνο αν:

$$\lambda^2 - \lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 1) \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{\lambda \neq 0 \text{ και } \lambda \neq 1}$$

β) Ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$(\lambda^2 - \lambda)x^2 - (\lambda^2 - 1)x + \lambda - 1 = 0$$
$$\lambda(\lambda - 1)x^2 - (\lambda - 1)(\lambda + 1)x + (\lambda - 1) = 0$$
$$(\lambda - 1)[\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1] = 0 \overset{\lambda \neq 1}{\Longleftrightarrow}$$
$$\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1 = 0$$

Happy School
Πρότυπο Κέντρο Εκπαίδευσης

γ) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ -{0, 1} το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1$ έχει διακρίνουσα:

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = [-(\lambda + 1)]^2 - 4 \cdot \lambda \cdot 1 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 - 4\lambda = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 > 0$,

Επομένως η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

δ) Οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-(\lambda+1)) \pm \sqrt{(\lambda-1)^2}}{2 \cdot \lambda} = \frac{\lambda+1 \pm (\lambda-1)}{2\lambda} = \begin{cases} \frac{\lambda+1+\lambda-1}{2\lambda} = 1 \\ \frac{\lambda+1-\lambda+1}{2\lambda} = \frac{1}{\lambda} \end{cases}$$