

Ασκήσεις



Άσκηση 1

Να λύσετε για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ τις εξισώσεις:

i) $\lambda^2 x + 1 = \lambda(x + 1)$ ii) $(\lambda^2 - 3\lambda + 2) \cdot x = \lambda - 1$

Άσκηση 2

Να λύσετε τις ακόλουθες εξισώσεις:

i) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ ii) $x^3 + 4 = x(4x + 1)$

iii) $(2x + 3)^3 - 2x - 3 = 0$ iv) $x(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$

Άσκηση 3

Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

i) $x^4 - 81 = 0$ ii) $x^5 - 8x^2 = 0$

iii) $5x^6 + 4x^2 = 0$ iv) $(4 - x)^5 - 32 = 0$

v) $x^9 + 1 = 0$ vi) $(2x - 1)^3 = -27$

Ασκήσεις που λύθηκαν μέσα στο μάθημαΆσκηση 1

Να λύσετε για τις διάφορες τιμές του λ την εξίσωση: $\lambda^2 x - \lambda^2 = 9x + 3\lambda$

Λύση

Φέρνουμε την παραμετρική εξίσωση στην μορφή $ax = \beta$.

$$\text{Είναι: } \lambda^2 x - \lambda^2 = 9x + 3\lambda \Leftrightarrow \lambda^2 x - 9x = \lambda^2 + 3\lambda \Leftrightarrow (\lambda^2 - 9)x = \lambda^2 + 3\lambda \Leftrightarrow$$

$$(\lambda - 3)(\lambda + 3)x = \lambda(\lambda + 3) \quad (1)$$

Εξετάζουμε για ποιες τιμές του λ μηδενίζεται ο συντελεστής του x . Έχουμε λοιπόν ότι:

$$(\lambda - 3)(\lambda + 3) = 0 \Leftrightarrow \lambda - 3 = 0 \text{ ή } \lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3 \text{ ή } \lambda = -3.$$

Θέτουμε κάθε μια από τις τιμές που βρήκαμε στην εξίσωση (1) για να δούμε τι λύσεις παίρνουμε σε κάθε περίπτωση.

- Για $\lambda = 3$ η (1) γίνεται: $0 \cdot x = 3 \cdot (3+3) \Leftrightarrow 0 \cdot x = 18$, αδύνατη. Άρα για $\lambda = 3$ η εξίσωση δεν έχει λύση.
- Για $\lambda = -3$ η (1) γίνεται: $0 \cdot x = -3 \cdot (-3+3) \Leftrightarrow 0 \cdot x = 0$, ταυτότητα. Άρα για $\lambda = -3$ η εξίσωση έχει άπειρες λύσεις.

Εξετάζουμε τώρα τι συμβαίνει για $\lambda \in \mathbb{R} - \{-3, 3\}$. Έχουμε τότε ότι: $(\lambda-3)(\lambda+3) \neq 0$ άρα η (1) γίνεται:

$$(\lambda - 3)(\lambda + 3)x = \lambda(\lambda + 3) \Leftrightarrow x = \frac{\lambda(\lambda + 3)}{(\lambda - 3)(\lambda + 3)} \Leftrightarrow x = \frac{\lambda}{\lambda - 3}. \text{ Άρα για όλα τα } \lambda \neq -3$$

και $\lambda \neq 3$ η εξίσωση θα έχει μοναδική λύση.



Άσκηση 2

Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\alpha) x^3 - 4x = 12 - 3x^2 \quad \beta) x^3 - 10 = x(5x - 2)$$

$$\gamma) 2(x^3 + 8) - x(x + 32) = 0$$

Λύση

$$\alpha) x^3 - 4x = 12 - 3x^2 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2(x + 3) - 4(x + 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x + 3)(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x - 2)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x + 3 = 0 \text{ ή } x - 2 = 0 \text{ ή } x + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = -3 \text{ ή } x = 2 \text{ ή } x = -2$$

$$\beta) x^3 - 10 = x(5x - 2) \Leftrightarrow x^3 - 10 = 5x^2 - 2x \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 2x - 10 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2(x - 5) + 2(x - 5) = 0 \Leftrightarrow (x - 5)(x^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow x - 5 = 0 \text{ ή } x^2 + 2 = 0, \text{ αδύνατη} \Leftrightarrow$$

$$x = 5$$

$$\gamma) 2(x^3 + 8) - x(x + 32) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 16 - x^2 - 32x = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - x^2 + 16 - 32x = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2(2x - 1) + 16(1 - 2x) = 0 \Leftrightarrow x^2(2x - 1) - 16(2x - 1) = 0 \Leftrightarrow (2x - 1)(x^2 - 16) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \text{ ή } x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ ή } x = 4 \text{ ή } x = -4$$



Άσκηση 3

Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$(i) x^5 - 8x^2 = 0 \quad (ii) x^6 - 64 = 0 \quad (iii) x^7 + x^5 + x^2 + 1 = 0 \quad (iv) x^5 = -125x^2$$

$$(v) x^6 = -32x \quad (vi) (2x + 6)^3 = 8$$

Λύση

$$(i) \text{ Είναι } x^5 - 8x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^3 - 8) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \text{ ή } x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = \sqrt[3]{2^3} \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2$$

$$(ii) x^6 - 64 = 0 \Leftrightarrow x^6 = 64 \Leftrightarrow x^6 = 8 \cdot 8 \Leftrightarrow x^6 = 2^3 \cdot 2^3 \Leftrightarrow x^6 = 2^6 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -2$$

(ν =άρτιος)

$$(iii) x^7 + x^5 + x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^5(x^2 + 1) + (x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1) \cdot (x^5 + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 1 = 0 \text{ αδύνατη ή } x^5 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^5 = -1 \Leftrightarrow x = -\sqrt[5]{|-1|} \Leftrightarrow x = -\sqrt[5]{1} \Leftrightarrow x = -1$$

$$(iv) x^5 = -125x^2 \Leftrightarrow x^5 + 125x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot (x^3 + 125) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \text{ ή } x^3 + 125 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x^3 = -125 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -\sqrt[3]{|-125|} \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -\sqrt[3]{5^3} \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -5$$

$$(v) x^6 = -32x \Leftrightarrow x^6 + 32x = 0 \Leftrightarrow x(x^5 + 32) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x^5 + 32 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x^5 = -32 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -\sqrt[5]{|-32|} \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -\sqrt[5]{2^5} \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -2$$

$$(vi) (2x + 6)^3 = 8 \Leftrightarrow (2x + 6)^3 = 2^3 \Leftrightarrow 2x + 6 = 2 \Leftrightarrow 2x = -4 \Leftrightarrow x = -2$$

ν =περιττος