Ασκήσεις στις ρίζες πραγματικών αριθμών (2.4)

Άσκηση 1 *(1340 Τράπεζα Θεμάτων)*

Αν είναι $A = 2 - \sqrt{3}$, $B = 2 + \sqrt{3}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B = 1$

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi = A^2 + B^2$

Άσκηση 2 *(1376 Τράπεζα Θεμάτων)*

Δίνεται η παράσταση $A = \left(\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1}\right) \cdot \left(\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1}\right)$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση Α είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x.

Λύσεις θεμάτων που έγιναν στο μάθημα

Happy School
Πρότυπο Κέντρο Εκπαίδευσης

Θέμα 1270

Δίνεται η παράσταση: $K = \frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2} - \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$.

α) Να βρεθούν οι τιμές που πρέπει να πάρει το *x*, ώστε η παράσταση *K* να έχει νόημα πραγματικού αριθμού. (Μονάδες 12)

β) Αν -2<x<3, να αποδείξετε ότι παράσταση *K* σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Πρέπει να ισχύει ότι: $x^2 + 4x + 4 \geq 0$ και $x^2 - 6x + 9 \geq 0$ και x + 2 ≠ 0 και x - 3 ≠ 0

Ισοδύναμα $(x+2)^2 \geq 0$, ισχύει για κάθε $x \in R$ και $(x-3)^2 \geq 0$, ισχύει για κάθε $x \in R$ και x ≠ -2 και x ≠ 3. Άρα τελικά το x μπορεί να παίρνει τιμές στο σύνολο $A = R - \{-2,3\}$. Συνεπώς η παράσταση μας ορίζεται στο σύνολο Α.

β) Έχουμε τώρα ότι: $K = \frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2} - \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3} \Leftrightarrow$

$$K = \frac{\sqrt{(x+2)^2}}{x+2} - \frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3} \Leftrightarrow K = \frac{|x+2|}{x+2} - \frac{|x-3|}{x-3} \quad (1)$$

Μας δίνεται όμως ότι -2 < x < 3 άρα -2 < x ⇔ x + 2 > 0 και x < 3 ⇔ x - 3 < 0. Επομένως

από (1) θα έχουμε ότι: $K = \frac{x+2}{x+2} - \frac{-x+3}{x-3} \Leftrightarrow K = 1 + 1 \Leftrightarrow K = 2$

Θέμα 1281

Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις:

$$A = \left(\sqrt{2}\right)^6, \qquad B = \left(\sqrt[3]{3}\right)^6, \qquad \Gamma = \left(\sqrt[6]{6}\right)^6 \quad .$$

α) Να δείξετε ότι:

$$A + B + \Gamma = 23 \ .$$ (Μονάδες 13)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

$$\sqrt[3]{3} \quad \text{και} \quad \sqrt[6]{6} \ .$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

Λύση

α) Είναι:

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} + \Gamma = (\sqrt{2})^6 + (\sqrt[3]{3})^6 + (\sqrt[6]{6})^6 = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6 + \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6 + \left(6^{\frac{1}{6}}\right)^6 =$$
$$= 2^{\frac{6}{2}} + 3^{\frac{6}{3}} + 6^{\frac{6}{6}} = 2^3 + 3^2 + 6 = 8 + 9 + 6 = 23$$

β) Είναι: $\sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}} = (3^2)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{9}$. Τότε:

$$6 < 9 \Leftrightarrow \sqrt[6]{6} < \sqrt[6]{9} \Leftrightarrow \sqrt[6]{6} < \sqrt[3]{3}$$

Θέμα 1335

Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \sqrt{(x-2)^2}$ και $B = \sqrt[3]{(2-x)^3}$, όπου x πραγματικός αριθμός

α) Για ποιες τιμές του *x* ορίζεται η παράσταση *A*; (Μονάδες 7)

β) Για ποιες τιμές του *x* ορίζεται η παράσταση *B*; (Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι, για κάθε x≤2, ισχύει *A*=B. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Πρέπει:

$$(x-2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

β) Πρέπει:

$$(2-x)^3 \geq 0 \Leftrightarrow 2-x \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq -2 \Leftrightarrow x \leq 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2]$$

γ) Για κάθε $x \leq 2$, είναι:

$$|x-2| = -(x-2) = 2-x$$

Τότε:

$$A = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2| = 2-x \quad \text{και} \quad B = \sqrt[3]{(2-x)^3} = 2-x$$

Άρα $A = B$

Θέμα 1338

Αν είναι $A=\sqrt[3]{5}$, $B=\sqrt{3}$, $\Gamma=\sqrt[6]{5}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B \cdot \Gamma = \sqrt{15}$ (Μονάδες 15)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς A, B . (Μονάδες 10)

Λύση

α) Είναι $A \cdot B \cdot \Gamma = \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[6]{5} = 5^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} =$

$3^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{3}{6}} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} = (3 \cdot 5)^{\frac{1}{2}} = 15^{\frac{1}{2}} = \sqrt{15}$, που ήταν το ζητούμενο.

β) Οι τάξεις των ριζών είναι οι 2 και 3. Άρα το ΕΚΠ των τάξεων των ριζών θα είναι 6. Επομένως φτιάχνω ρίζες με την ίδια τάξη για να μπορέσω να τις συγκρίνω. Έχουμε:

$A = \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} = (5^2)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{25}$ και $B = \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} = (3^3)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27}$

Άρα $25 < 27 \Leftrightarrow \sqrt[6]{25} < \sqrt[6]{27} \Leftrightarrow A < B$