

## Ασκήσεις



### Άσκηση 1

Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{1-2x}{8} + \frac{3+x}{2} = \frac{2x+5}{4} + \frac{1-10x}{24} \quad \beta) \frac{3x+1}{4} + 1 = \frac{x+1}{4}$$

### Άσκηση 2

Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{x+1}{x^2-1} + \frac{2}{x^2-2x+1} = 0 \quad \beta) \frac{15}{x-2} - \frac{4}{x+2} = \frac{5}{x^2-4}$$

### Άσκηση 3

Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) |2x+1| = -5 \quad \beta) |x-4| - 5 = 0 \quad \gamma) |3x-2| - |x+6| = 0$$

$$\delta) |3x-6| = 6-3x \quad \epsilon) x + |x+3| - |4-x| = 0$$

### Άσκηση 4

Να λυθούν οι εξισώσεις για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$\alpha) \lambda(\lambda-1) \cdot x = \lambda-1 \quad \beta) \lambda x - 3\lambda = \lambda^2 - 3x$$

## Ασκήσεις που λύθηκαν μέσα στο μάθημα



### Άσκηση 1 (Επίλυση παραμετρικής εξίσωσης)

Έστω η εξίσωση  $(\lambda^2 - 1)x - \lambda + 1 = 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Ζητείται να βρεθούν οι λύσεις της.

### Λύση

Βλέπουμε ότι η εξίσωση είναι παραμετρική πρώτου βαθμού με παράμετρο την  $\lambda$ . Για να την λύσουμε κάνουμε τα εξής:

**1ο βήμα:** *Η εξίσωση δεν είναι στην μορφή  $ax = b$ , οπότε μέσω πράξεων θα την φέρουμε σε αυτή την μορφή.*

$$(\lambda^2 - 1)x - \lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 - 1)x = \lambda - 1 \quad (1)$$

Η εξίσωση ήρθε στην μορφή  $ax = b$  οπότε τώρα διακρίνουμε ότι  $a = \lambda^2 - 1$  και  $b = \lambda - 1$ .

**2ο βήμα:** *Εξετάζουμε για ποιες τιμές του  $\lambda$  μηδενίζεται ο συντελεστής του  $x$ . Στη συνέχεια θέτουμε χωριστά κάθε μια τις τιμές αυτές της παραμέτρου για τις οποίες μηδενίζεται το  $a$  στην εξίσωση και λύνουμε την μη παραμετρική εξίσωση που προκύπτει.*

- Όταν είναι  $a = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1$  ή  $\lambda = -1$  τότε θα έχουμε:
  - α) Για  $\lambda = 1$  από την (1) προκύπτει:  $0 \cdot x = 1 - 1 \Leftrightarrow 0 \cdot x = 0$ , το οποίο σημαίνει ότι η εξίσωση είναι **ταυτότητα** δηλαδή έχει άπειρες λύσεις.
  - β) Για  $\lambda = -1$  από την (1) προκύπτει:  $0 \cdot x = -1 - 1 \Leftrightarrow 0 \cdot x = -2$ , το οποίο σημαίνει ότι η εξίσωση είναι **αδύνατη** δεν έχει δηλαδή λύσεις στο  $\mathbb{R}$ .

- Όταν είναι  $a \neq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 \neq 1 \Leftrightarrow \lambda \neq 1$  και  $\lambda \neq -1$ , τότε θα έχουμε:

Από την (1) προκύπτει:



$$(\lambda^2 - 1)x = \lambda - 1 \Leftrightarrow x = \frac{\lambda - 1}{\lambda^2 - 1} \Leftrightarrow x = \frac{\lambda - 1}{(\lambda - 1)(\lambda + 1)} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\lambda + 1} \text{ \u0391\u03c1\u03b1 \u03c4\u03cc\u03c4\u03b5 \u03b7 \u03b5\u03be\u03b9\u03c3\u03c9\u03c3\u03b7}$$

\u0395\u03c7\u03b5\u03b9 \u03bc\u03bf\u03bd\u03b1\u03b4\u03b9\u03ba\u03b7 \u03bb\u03c5\u03c3\u03b7 \u03c0\u03bf\u03c5 \u03b8\u03b1 \u03b5\u03c7\u03b5\u03b9 \u03c4\u03b7\u03bd \u03bc\u03bf\u03c1\u03c6\u03b7  $x = \frac{1}{\lambda + 1}$  \u03b3\u03b9\u03b1 \u03c4\u03b9\u03c3 \u03b4\u03b9\u03ac\u03c6\u03bf\u03c1\u03b5\u03c3 \u03c4\u03b9\u03bc\u03ad\u03c3 \u03c4\u03bf\u03c5  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

### **\u0391\u03c3\u03ba\u03b7\u03c3\u03b7 2** (\u0395\u03c0\u03b9\u03bb\u03c5\u03c3\u03b7 \u03c1\u03b7\u03b3\u03b7\u03c3 \u03b5\u03be\u03b9\u03c3\u03c9\u03c3\u03b7\u03c3)

\u039d\u03b1 \u03bb\u03c5\u03b8\u03b5\u03b9 \u03b7 \u03b5\u03be\u03b9\u03c3\u03c9\u03c3\u03b7:  $\frac{x}{x-1} = \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2-x}$

### **\u0391\u03bb\u03c5\u03c3\u03b7**

$$\text{\u0391\u03c0\u03c1\u03b5\u03c0\u03b5\u03b9: } \begin{cases} x-1 \neq 0 \\ x \neq 0 \\ x^2-x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 0 \\ x(x-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 0 \\ x \neq 0 \text{ \u03ba\u03b9} \text{ } x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ \u03ba\u03b9} \text{ } x \neq 1$$

\u0391\u03c1\u03b1 \u03c4\u03bf \u03c3\u03c5\u03bd\u03bf\u03bb\u03bf \u03bf\u03c1\u03b9\u03c3\u03bc\u03bf\u03c5 \u03c4\u03b7\u03c3 \u03b5\u03be\u03b9\u03c3\u03c9\u03c3\u03b7\u03c3 \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03c4\u03bf  $D = \mathbb{R} - \{0,1\}$  \u03b7 \u03b3\u03c1\u03ac\u03c6\u03bf\u03bd\u03c4\u03b1\u03c3 \u03c4\u03bf \u03c9\u03c3 \u03b4\u03b9\u03ac\u03c3\u03c4\u03b7\u03bc\u03b1 \u03b8\u03b1 \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03c4\u03bf  $D = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$ .

\u038c\u03c7\u03bf\u03bc\u03b5 \u03c4\u03c9\u03c1\u03b1 \u03b9\u03c3\u03bf\u03b4\u03c5\u03bd\u03b1\u03bc\u03b1 \u03bf\u03c4\u03b9:  $\frac{x}{x-1} = \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2-x} \Leftrightarrow \frac{x}{x-1} = \frac{2}{x} + \frac{2}{x(x-1)} \Leftrightarrow$

$$\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x} - \frac{2}{x(x-1)} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x(x-1)} - \frac{2(x-1)}{x(x-1)} - \frac{2}{x(x-1)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2 - 2(x-1) - 2}{x(x-1)} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x}{x(x-1)} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ \u03b7 } x = 2.$$

\u0391\u03c0\u03b1\u03c1\u03c4\u03b7\u03c1\u03bf\u03c5\u03bc\u03b5 \u03bf\u03c4\u03b9 \u03b7 \u03bb\u03c5\u03c3\u03b7  $x = 0$  \u03b1\u03c0\u03bf\u03c1\u03c1\u03b9\u03c0\u03c4\u03b5\u03c4\u03b1\u03b9 \u03b4\u03b9\u03c9\u03c4\u03b9 \u03b4\u03b5\u03bd \u03b1\u03bd\u03b7\u03ba\u03b5\u03b9 \u03c4\u03bf \u03c3\u03c5\u03bd\u03bf\u03bb\u03bf \u03bf\u03c1\u03b9\u03c3\u03bc\u03bf\u03c5  $D$  \u03c4\u03b7\u03c3 \u03b5\u03be\u03b9\u03c3\u03c9\u03c3\u03b7\u03c3. \u0391\u03c1\u03b1 \u03c4\u03b5\u03bb\u03b9\u03ba\u03ac \u03b7 \u03bc\u03bf\u03bd\u03b1\u03b4\u03b9\u03ba\u03b7 \u03bb\u03c5\u03c3\u03b7 \u03c4\u03b7\u03c3 \u03b5\u03be\u03b9\u03c3\u03c9\u03c3\u03b7\u03c3 \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03b7  $x = 2$ .



**Άσκηση 3** (Επίλυση εξίσωσης με απόλυτη τιμή. Περίπτωση 1)

Να λυθεί η εξίσωση  $|-2x+3|=1$

**Λύση**

Θα έχουμε ισοδύναμα ότι:  $|-2x+3|=1 \Leftrightarrow -2x+3=1$  ή  $-2x+3=-1 \Leftrightarrow -2x=-2$  ή  $-2x=-4 \Leftrightarrow x=1$  ή  $x=2$

**Άσκηση 4** (Επίλυση εξίσωσης με απόλυτη τιμή. Περίπτωση 2)

Να λυθεί η εξίσωση  $|4x-1|=|x-2|$

**Λύση**

Είναι:  $|4x-1|=|x-2| \Leftrightarrow 4x-1=x-2$  ή  $4x-1=-(x-2) \Leftrightarrow 4x-x=1-2$  ή  $4x-1=-x+2 \Leftrightarrow 3x=-1$  ή  $4x+x=1+2 \Leftrightarrow 5x=3 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$  ή  $x=\frac{3}{5}$

**Άσκηση 5** (Επίλυση εξίσωσης με απόλυτη τιμή. Περίπτωση 3)

Να λυθεί η εξίσωση  $|4x-1|=-x+2$

**Λύση**

Για να έχει η εξίσωση λύση θα πρέπει:  $-x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$ . Άρα  $D = (-\infty, 2]$ .

Είναι τώρα:  $|4x-1|=-x+2 \Leftrightarrow 4x-1=-x+2$  ή  $4x-1=-(-x+2) \Leftrightarrow$

$$5x = 3 \text{ ή } 4x - 1 = x - 2 \Leftrightarrow 5x = 3 \text{ ή } 3x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3}{5} \text{ ή } x = -\frac{1}{3} \text{ δεκτές και}$$

οι δυο λύσεις.



### **Άσκηση 6** (Επίλυση εξίσωσης με απόλυτη τιμή. Περίπτωση 4)

Να λυθεί η εξίσωση  $|x + 2| = 2|x - 1| + 1$

#### **Λύση**

Έχουμε ότι:

- $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$
- $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
x+2	-	+	+	
x-1	-	-	+	

Παρατηρούμε ότι για  $x < -2$  είναι  $x + 2 < 0$  και  $x < -2 \Leftrightarrow x - 1 < -3$ . Άρα και οι δυο παραστάσεις στο διάστημα αυτό είναι αρνητικές. Για  $-2 \leq x < 1$  είναι:  $-2 \leq x \Leftrightarrow x + 2 \geq 0$  και  $x < 1 \Leftrightarrow x - 1 < 0$ . Τέλος για  $x \geq 1$  είναι  $x \geq 1 \Leftrightarrow x + 2 \geq 3$  και  $x \geq 1 \Leftrightarrow x - 1 \geq 0$ .

- Στο διάστημα  $(-\infty, -2]$  με βάση τον πίνακα θα έχουμε ότι  $|x+2| = -x - 2$  και  $|x-1| = -x + 1$ . Όποτε η εξίσωση θα γίνει:  $|x + 2| = 2|x - 1| + 1 \Leftrightarrow -x - 2 = 2(-x + 1) + 1 \Leftrightarrow -x - 2 = -2x + 2 + 1 \Leftrightarrow x = 5$  αδύνατο διότι είμαστε για  $x \leq -2$  άρα η λύση αυτή δεν γίνεται δεκτή.
- Στο διάστημα  $(-2, 1]$  από τον πίνακα προσήμου θα έχουμε ότι:  $|x+2| = x + 2$  και  $|x-1| = -x + 1$  άρα η εξίσωση θα γίνει:  $|x + 2| = 2|x - 1| + 1 \Leftrightarrow x + 2 = 2(-x + 1) + 1 \Leftrightarrow x + 2 = -2x + 2 + 1 \Leftrightarrow 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$  **δεκτή λύση.**

- Στο διάστημα  $[1, +\infty)$  με βάση τον πίνακα θα έχουμε ότι  $|x+2| = x+2$  και  $|x-1|=x-1$  οπότε η εξίσωση θα γίνει:  $|x+2| = 2|x-1| + 1 \Leftrightarrow x+2 = 2(x-1) + 1 \Leftrightarrow x+2 = 2x-2+1 \Leftrightarrow x=3$  δεκτή λύση.

