Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\dfrac{1-2x}{8}+\dfrac{3+x}{2}=\dfrac{2x+5}{4}+\dfrac{1-10x}{24}$ β) $\dfrac{3x+1}{4}+1=\dfrac{x+1}{4}$

Άσκηση 2

Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\dfrac{x+1}{x^2-1}+\dfrac{2}{x^2-2x+1}=0$ β) $\dfrac{15}{x-2}-\dfrac{4}{x+2}=\dfrac{5}{x^2-4}$

Άσκηση 3

Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\left|2x+1\right|=-5$ β) $|x-4|-5=0$ γ) $|3x-2|-|x+6|=0$

δ) $|3x-6|=6-3x$ ε) $x+|x+3|-|4-x|=0$

Άσκηση 4

Να λυθούν οι εξισώσεις για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ $\in R$:

α) $\lambda(\lambda-1)\cdot x=\lambda-1$ β) $\lambda x-3\lambda=\lambda^2-3x$

<u>Ασκήσεις που λύθηκαν μέσα στο μάθημα</u>

<u>Άσκηση 1</u> *(Επίλυση παραμετρικής εξίσωσης)*

Έστω η εξίσωση $(\lambda^2 - 1)x - \lambda + 1 = 0, \lambda \in R$. Ζητείται να βρεθούν οι λύσεις της.

<u>Λύση</u>

Βλέπουμε ότι η εξίσωση είναι παραμετρική πρώτου βαθμού με παράμετρο την λ. Για να την λύσουμε κάνουμε τα εξής:

<u>1ο βήμα:</u> ***Η εξίσωση δεν είναι στην μορφή αx = β, οπότε μέσω πράξεων θα την φέρουμε σε αυτή την μορφή.***

$(\lambda^2 - 1)x - \lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\lambda^2 - 1\right) x = \lambda - 1$ (1)

Η εξίσωση ήρθε στην μορφή αx = β οπότε τώρα διακρίνουμε ότι α = $\lambda^2 - 1$ και β = λ -1.

<u>2ο βήμα:</u> ***Εξετάζουμε για ποιες τιμές του λ μηδενίζεται ο συντελεστής του x. Στη συνέχεια θέτουμε χωριστά κάθε μια τις τιμές αυτές της παραμέτρου για τις οποίες μηδενίζεται το α στην εξίσωση και λύνουμε την μη παραμετρική εξίσωση που προκύπτει.***

- Όταν είναι $a = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ή $\lambda = -1$ τότε θα έχουμε:

  α) **Για λ = 1** από την (1) προκύπτει: $0 \cdot x = 1 - 1 \Leftrightarrow 0 \cdot x = 0$, το οποίο σημαίνει ότι η εξίσωση είναι **ταυτότητα** δηλαδή έχει άπειρες λύσεις.

  β) **Για λ = -1** από την (1) προκύπτει: $0 \cdot x = -1 - 1 \Leftrightarrow 0 \cdot x = -2$, το οποίο σημαίνει ότι η εξίσωση είναι **αδύνατη** δεν έχει δηλαδή λύσεις στο R.

- Όταν είναι $a \neq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 \neq 1 \Leftrightarrow \lambda = 1$ και $\lambda \neq -1$, τότε θα έχουμε:

Από την (1) προκύπτει:

$\left(\lambda^2-1\right)x=\lambda-1 \Leftrightarrow x=\dfrac{\lambda-1}{\lambda^2-1} \Leftrightarrow x=\dfrac{\lambda-1}{(\lambda-1)(\lambda+1)} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\lambda+1}$ άρα τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση που θα έχει την μορφή $x=\dfrac{1}{\lambda+1}$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in R$.

<u>Άσκηση 2</u> *(Επίλυση ρητής εξίσωσης)*

Να λυθεί η εξίσωση: $\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2-x}$

<u>Λύση</u>

Πρέπει: $\begin{cases} x-1 \neq 0 \\ x \neq 0 \\ x^2-x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 0 \\ x(x-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 0 \\ x \neq 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$ x ≠ 0 και x ≠ 1

Άρα το σύνολο ορισμού της εξίσωσης είναι το $D=R-\{0,1\}$ ή γράφοντας το ως διάστημα θα είναι το $D=(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$.

Έχουμε τώρα ισοδύναμα ότι: $\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2-x} \Leftrightarrow \dfrac{x}{x-1}=\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x(x-1)} \Leftrightarrow$

$\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x(x-1)}=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{x(x-1)}-\dfrac{2(x-1)}{x(x-1)}-\dfrac{2}{x(x-1)}=0 \Leftrightarrow$

$\dfrac{x^2-2(x-1)-2}{x(x-1)}=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-2x}{x(x-1)}=0 \Leftrightarrow x^2-2x=0 \Leftrightarrow x(x-2)=0 \Leftrightarrow$ x = 0 ή x = 2.

Παρατηρούμε ότι η λύση x = 0 απορρίπτεται διότι δεν ανήκει στο σύνολο ορισμού D της εξίσωσης. Άρα τελικά η μοναδική λύση της εξίσωσης είναι η x = 2.

Άσκηση 3 *(Επίλυση εξίσωσης με απόλυτη τιμή. Περίπτωση 1)*

Να λυθεί η εξίσωση |-2x+3| =1

Λύση

Θα έχουμε ισοδύναμα ότι: |-2x+3| =1 $\Leftrightarrow -2x+3=1$ ή $-2x+3=-1 \Leftrightarrow -2x=-2$ ή $-2x=-4 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=2$

Άσκηση 4 *(Επίλυση εξίσωσης με απόλυτη τιμή. Περίπτωση 2)*

Να λυθεί η εξίσωση $|4x-1|=|x-2|$

Λύση

Είναι: $|4x-1|=|x-2|$ ⇔ 4x -1 = x -2 ή 4x - 1 = - (x-2) ⇔ 4x -x = 1 -2 ή 4x -1 = -x+2 ⇔ 3x = -1 ή 4x + x = 1 + 2 ⇔ 3x = -1 ή 5x = 3 ⇔ $x=-\dfrac{1}{3}$ ή $x=\dfrac{3}{5}$

Άσκηση 5 *(Επίλυση εξίσωσης με απόλυτη τιμή. Περίπτωση 3)*

Να λυθεί η εξίσωση $|4x-1|=-x+2$

Λύση

Για να έχει η εξίσωση λύση θα πρέπει: $-x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$. Άρα $D=(-\infty,2]$.

Είναι τώρα: $|4x-1|=-x+2 \Leftrightarrow 4x-1=-x+2$ ή $4x-1=-(-x+2) \Leftrightarrow$

5x = 3 ή 4x - 1 = x - 2 ⇔ 5x = 3 ή 3x = -1 ⇔ $x = \frac{3}{5}$ ή $x = -\frac{1}{3}$ δεκτές και οι δυο λύσεις.

Άσκηση 6 *(Επίλυση εξίσωσης με απόλυτη τιμή. Περίπτωση 4)*

Να λυθεί η εξίσωση $|x+2| = 2|x-1| + 1$

Λύση

Έχουμε ότι:

- $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$
- $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου:

x	$-\infty$	-2	1 $+\infty$
x+2	-	+	+
x-1	-	-	+

Παρατηρούμε ότι για x < -2 είναι x + 2 < 0 και x < - 2 ⇔ x - 1 < -3. Άρα και οι δυο παραστάσεις στο διάστημα αυτό είναι αρνητικές. Για -2 ≤ x < 1 είναι: -2 ≤ x ⇔ x + 2 ≥ 0 και x < 1 ⇔ x -1 < 0 .Τέλος για x ≥ 1 είναι $x \geq 1 \Leftrightarrow x + 2 \geq 3$ και $x \geq 1 \Leftrightarrow x - 1 \geq 0$.

- Στο διάστημα $(-\infty, -2]$ με βάση τον πίνακα θα έχουμε ότι |x+2| = -x -2 και |x-1| = -x + 1. Όποτε η εξίσωση θα γίνει: $|x+2| = 2|x-1| + 1 \Leftrightarrow -x - 2 = 2(-x+1) + 1 \Leftrightarrow$ $-x - 2 = -2x + 2 + 1 \Leftrightarrow$ x = 5 αδύνατο διότι είμαστε για x ≤ -2 άρα η λύση αυτή δεν γίνεται δεκτή.

- Στο διάστημα (-2,1] από τον πίνακα προσήμου θα έχουμε ότι: |x+2| = x + 2 και |x-1| = -x + 1 άρα η εξίσωση θα γίνει: $|x+2| = 2|x-1| + 1 \Leftrightarrow x + 2 = 2(-x+1) + 1 \Leftrightarrow$ $x + 2 = -2x + 2 + 1 \Leftrightarrow$ 3x = 1 $\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ **δεκτή λύση.**

- Στο διάστημα $[1, +\infty)$ με βάση τον πίνακα θα έχουμε ότι |x+2| = x+ 2 και |x-1|=x-1 οπότε η εξίσωση θα γίνει: $|x+2| = 2|x-1| + 1 \Leftrightarrow$ x + 2 = 2(x-1) + 1 ⇔ x + 2 = 2x-2 + 1 ⇔ x = 3 **δεκτή λύση.**

Happy School
Πρότυπο Κέντρο Εκπαίδευσης